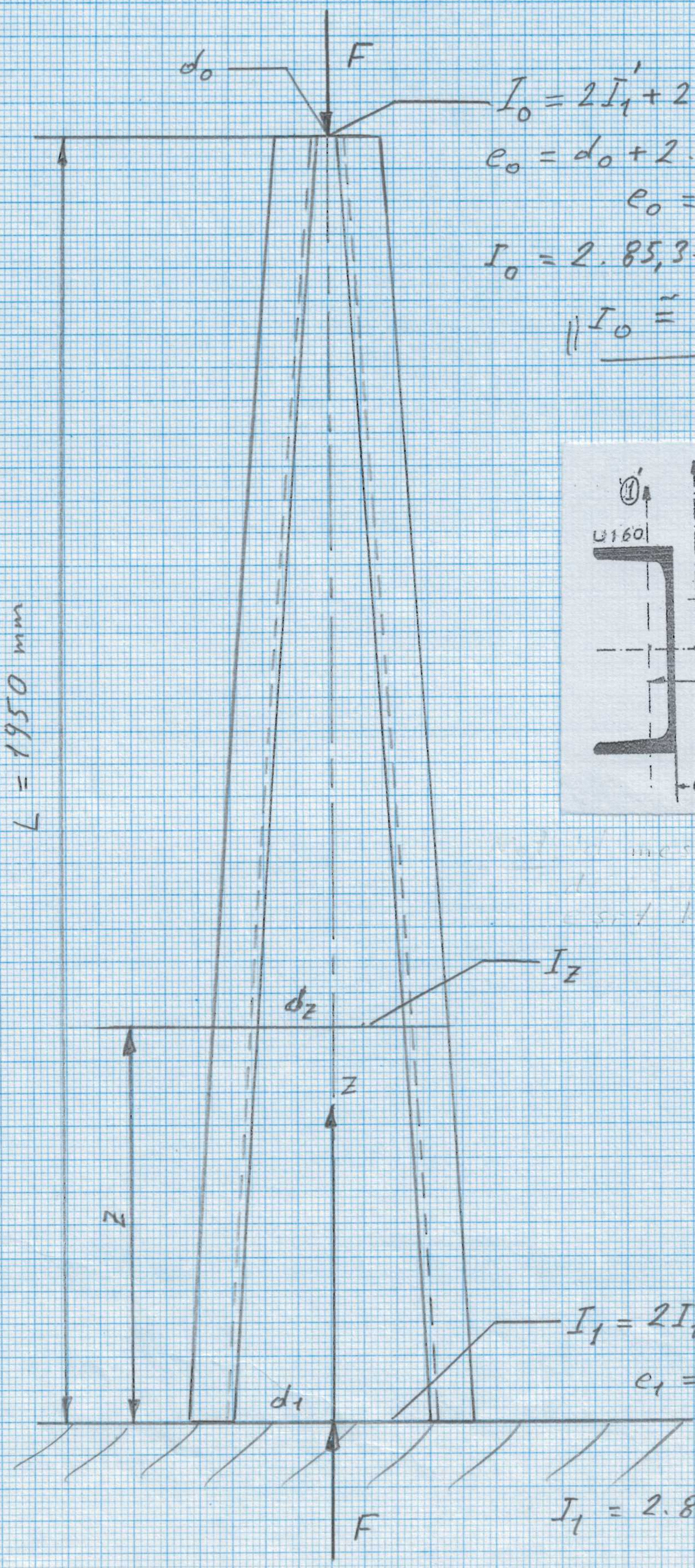
Molet ve

Molet Saplamaları

MUKAVEMET Hesabı

(inceleme)

- VIII -



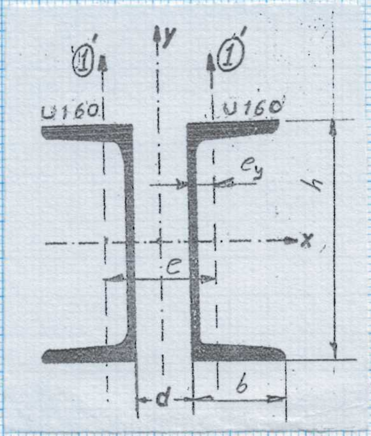
$$I_0 = 2I_1' + 2A_1\left(\frac{e_0}{2}\right)^2$$

$$e_0 = d_0 + 2 \cdot e_y = 3 + 2 \cdot 1{,}84$$

$$e_0 = 6{,}68 \text{ cm}$$

$$I_0 = 2 \cdot 85{,}3 + 2 \cdot 24 \left(\frac{6{,}68}{2}\right)^2$$

$$I_0 \cong 706 \text{ cm}^4$$



$$I_1 = 2I_1' + 2A_1\left(\frac{e_1}{2}\right)^2$$

$$e_1 = d_1 + 2 \cdot e_y = 30{,}7 + 2 \cdot 1{,}84$$

$$e_1 = 34{,}38 \text{ cm}$$

$$I_1 = 2 \cdot 85{,}3 + 2 \cdot 24 \left(\frac{34{,}38}{2}\right)^2$$

$$I_1 = 14354{,}4 \text{ cm}^4$$

Şekil 38- Değişken kesitli bileşik kolonda, burkulma eksenine göre eylemsizlik momentleri.

değerleri yerlerine koyalım.

$$d_z = 30{,}7 + (3 - 30{,}7)\frac{z}{195}$$

$$\| \; d_z = (30{,}7 - 0{,}142 \cdot z) \text{ cm}$$

$$I_z = 2 I_1' + 2 \cdot A_1 \left(\frac{e_z}{2}\right)^2 \quad (\text{Eşitlik } 14)$$

$$e_z = d_z + 2 \cdot e_y$$

$$e_z = 30{,}7 - 0{,}142\, z + 2 \cdot 1{,}84$$

$$\| \; e_z = (34{,}38 - 0{,}142\, z) \text{ cm}$$

$$\| \; I_z = 2 \cdot 85{,}3 + 2 \cdot 24 \left(\frac{34{,}38 - 0{,}142\, z}{2}\right)^2$$

$$I_z = 170{,}6 + 12\,(34{,}38 - 0{,}142 \cdot z)^2$$

$$I_z = 170{,}6 + 12\,(1181{,}9844 - 9{,}7639\, z + 0{,}020 \cdot z^2)$$

$$I_z = 14354{,}4 - 117{,}1668\, z + 0{,}24\, z^2$$

veya,

$$\| \; I_z = (0{,}24\, z^2 - 117 \cdot z + 14354{,}4) \text{ cm}^4$$

olarak alınabilir. Eğe- elastik eğriyi yaklaşık olarak ifade edecek sapma fonksiyonu (örnek 10'a bakın Sayfa: 83)

$$\bar{V}(z) = V_{max} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{2L}\right) \right]$$

şeklinde seçilirse (Şekil 25b. Sayfa: 87)

$z = 0$ için,

$$\bar{V}(0) = V_{max} \left[1 - \cos 0 \right] = 0$$

$z = L$ için,

$$\bar{V}(L) = V_{max} \left[1 - \cos\frac{\pi}{2} \right] = V_{max}$$

olur.

V – Elästik eğride, çökme veya sehim.

Yaklaşık kritik yük,

$$\bar{F}_{kr.} = \frac{\int_0^L EI\,(\bar{V}'')^2\,dz}{\int_0^L (\bar{V}')^2\,dz} \qquad \text{(Eşitlik 65)}$$

olduğuna göre,

$$\bar{V}'(z) = V_{max} \left[\left(\sin\frac{\pi z}{2L}\right) \cdot \frac{\pi}{2L} \right]$$

$$\bar{V}'(z) = \frac{V_{max} \cdot \pi}{2L} \sin\frac{\pi z}{2L}$$

$$\bar{V}''(z) = \frac{V_{max} \cdot \pi}{2L} \left(\cos\frac{\pi z}{2L}\right) \frac{\pi}{2L}$$

$$\bar{V}''(z) = \frac{V_{max} \cdot \pi^2}{4L^2} \cos\frac{\pi z}{2L}$$

$$\bar{F}_{kr.} = \frac{\dfrac{V_{max}^2 \cdot \pi^4 E}{16L^4} \displaystyle\int_0^L (0{,}24 z^2 - 117 \cdot z + 14354) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi z}{2L}\right) dz}{\dfrac{V_{max}^2 \cdot \pi^2}{4L^2} \displaystyle\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi z}{2L}\right) dz}$$

$$\overline{F}_{kr.} = \frac{\dfrac{\pi^2 E}{4L^2} \displaystyle\int_0^L (0{,}24 Z^2 - 117 Z + 14354) \cos^2\left(\frac{\pi Z}{2L}\right) dZ}{\displaystyle\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi Z}{2L}\right) dZ}$$

$$M = \int_0^L (0{,}24 Z^2 - 117 \cdot Z + 14354) \cos^2\left(\frac{\pi Z}{2L}\right) dZ$$

integralinde önce boyut analizine bakalım ve sonra hesaplıyalım.

$$M = \int_0^L I_Z \cos^2\left(\frac{\pi Z}{2L}\right) dZ$$

I_Z boyutu $[cm^4]$, integral hesaplanınca L sınırından dolayı da M boyutu $[cm^5]$ olur.

integrali hesaplıyalım,

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi Z}{2L}\right) dZ = \frac{1}{2} L \\ &\bullet \int_0^L \cos^2\left(\frac{\pi Z}{2L}\right) dZ = \frac{1}{2} L \end{aligned}\right\} \text{(Sayfa: 89)}$$

$$\bullet \int_0^L Z \cos^2\left(\frac{\pi Z}{2L}\right) dZ = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\right) L^2 \quad \text{(Sayfa: 90)}$$

$\bullet \displaystyle\int_0^L Z^2 \cos^2\left(\frac{\pi Z}{2L}\right) dZ$ değeri,

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi z}{2L}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi z}{L}\right)$$

$$\int_0^L z^2 \cos^2\left(\frac{\pi z}{2L}\right) dz = \frac{1}{2}\int_0^L z^2\left(1+\cos\frac{\pi z}{L}\right) dz$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{z^3}{3}\Big|_0^L + \frac{1}{2}\int_0^L z^2 \cos\frac{\pi z}{L}\, dz$$

$$= \frac{L^3}{6} + \frac{1}{2}\int_0^L z^2 . d\left(\sin\frac{\pi z}{L}\right)\frac{L}{\pi}$$

$$= \frac{L^3}{6} + \frac{1}{2}\, z^2 \sin\frac{\pi z}{L}\cdot\frac{L}{\pi}\Big|_0^L - \frac{L}{2\pi}\int_0^L \sin\frac{\pi z}{L}\cdot 2z . dz$$

$$= \frac{L^3}{6} + 0 - \frac{L}{\pi}\int_0^L z\cdot \sin\frac{\pi z}{L}\, dz$$

$$= \frac{L^3}{6} - \frac{L}{\pi}\int_0^L z\, d\left(-\cos\frac{\pi z}{L}\cdot\frac{L}{\pi}\right)$$

$$= \frac{L^3}{6} - \frac{L}{\pi}\left[-z\cdot\frac{L}{\pi}\cdot\cos\frac{\pi z}{L}\Big|_0^L + \frac{L}{\pi}\int_0^L \cos\frac{\pi z}{L}\, dz\right]$$

$$= \frac{L^3}{6} - \frac{L}{\pi}\left[-\frac{L^2}{\pi}\cos\pi + \frac{L}{\pi}\sin\frac{\pi z}{L}\cdot\frac{L}{\pi}\Big|_0^L\right]$$

$$= \frac{L^3}{6} - \frac{L}{\pi}\left[\frac{L^2}{\pi} + 0\right]$$

$$= \frac{L^3}{6} - \frac{L^3}{\pi^2} = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\right)L^3$$

Bulunan değerler $\overline{F}_{kr}$ denkleminde yerine konursa,

$$\overline{F_{kr}} = \frac{\frac{\pi^2 E}{4L^2} \cdot M}{\frac{1}{2} L}$$

$$\overline{F_{kr}} = \frac{\pi^2 E}{2L^3} \cdot M$$

$$M = \int_0^L 0{,}24 \cdot z^2 \cos^2\left(\frac{\pi z}{2L}\right) dz = 0{,}24 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\right) L^3$$

$$-117 \int_0^L z \cos^2\left(\frac{\pi z}{2L}\right) dz = -117 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\right) L^2$$

$$+14354 \int_0^L \cos^2\left(\frac{\pi z}{2L}\right) dz = 14354 \cdot \frac{1}{2} L$$

$$\overline{F_{kr}} = \frac{\pi^2 E}{2L^3} \cdot M$$

Boyut analizi,

$\overline{F_{kr}}$	E	L	M
kgf	kgf/cm^2	cm	cm^5

$$\overline{F_{kr}} = \frac{\pi^2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6}{2 \cdot 195^3} \left[0{,}24 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\right) 195^3 - 117 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\right) 195^2 + \frac{14354}{2} \cdot 195 \right]$$

$$\overline{F_{kr}} = 1194033 \text{ kgf}$$

$$\overline{\| F_{kr}} \cong 119,4 \text{ kN}$$

$$F = 97,86 \text{ kN} \quad (\text{Sayfa: } 138)$$

$$\overline{\| F_{kr}} \; (\cong 119,4 \text{ kN}) > F \; (= 97,86 \text{ kN})$$

uygun sonuç bulunur. Yani,

U - 160][

kesitli profili $F = 97,86$ kN 'luk kuvveti rahatlıkla taşır.

<u>Not.1</u> - Bileşik kesitli çerçeve biçimli kolonumuzda, U 160 profillerini birleştiren

200 . 90 . 20

177 . 160 . 20

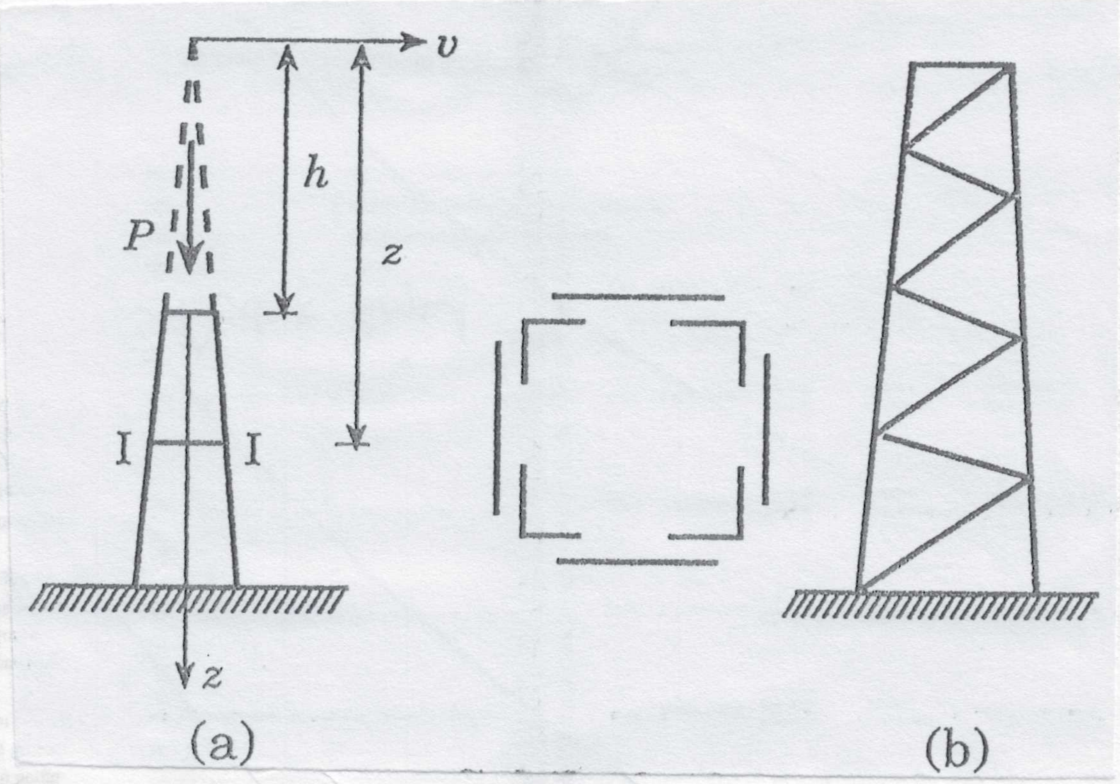
234 . 160 . 20

kesitli bağ elemanlarının (şekil 136), burkulma esnasında yapacakları şekil değiştirmeler göz önüne alınmamıştır. (Örnek 8'ie inceleyiniz) tir. daha büyük

<u>Not. 2</u> - Hesaplarda kullanılan büyüklükler resimler üzerinden ölçekle alınmıştır. Hatalar olabilir.

Not. 3 - Kesit eylemsizlik momenti eksen boyunca değişken olan kolonların (değişken kesitli kolon) burkulması ile ilgili bazı literatürlerden alınan kısa bilgileri vererek bu konuyu kapatalım.

• [L 20] :



Şekil 39 - Değişken kesitli kolon [L 20].

Şekil 39 da görülen bir ucu ankastre diğer ucu serbest olan kolonu göz önüne alalım. $n=1$ hali bir kenarı sabit diğer kenarı doğrusal olarak değişen dikdörtgen kesitli kolon formuna karşılık gelmektedir. $n=2$ ise yaklaşık dört korniyer ve diyagonaller ile teşkil edilmiş kolonun eylemsizlik moment değişimine karşılık gelmektedir (Şekil 39 b). $n=4$ ise koni veya piramidin eylemsizlik moment değişimine karşı gelmektedir.

Şekil 39 a da verilen kolonun elâstik eğrisinin diferansiyel denklemi

$$EI_0 \left(\frac{z}{h}\right)^n v'' = -P \cdot v \qquad (85)$$

şeklinde yazılır. Bu denklem genel olarak Bessel fonksiyonları ile çözülür, yalnız $n = 2, 4$ için elemanter fonksiyonlar için çözüm vardır.

I_0 – Eylemsizlik momenti, $z=h$ daki eylemsizlik momentidir.

[21]: F yüküne maruz değişken kesitli bir kolonun (Şekil 40) burkulma denklemi

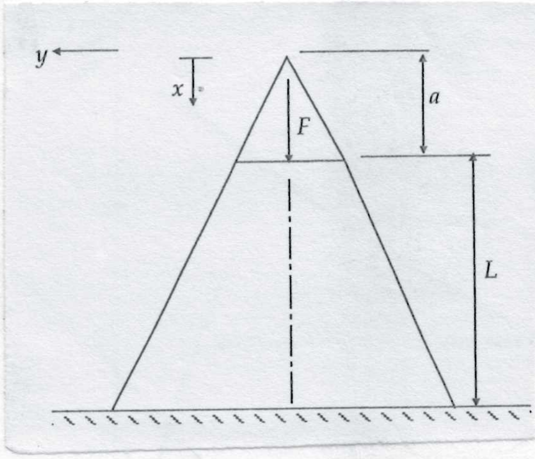
$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{F\alpha^2}{EI} y = 0, \quad \alpha < x < (\alpha + L) \qquad (86)$$

ile verilmektedir. Burada,

E – Rijitlik modülü

I – Atalet momenti

dır.



Şekil 40- Değişken kesitli kolon. [L 21]

Sınır şartlarının

$$y(\alpha)=0\ ,\ y'(\alpha+L)=0$$

şeklinde verildiğini kabul edelim. Eşitlik 86, Euler denklemi tipindedir. İlk sınır şartı dikkate alınarak

$$y = A\,x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Sin}\left[\beta \ln(x/\alpha)\right]$$

bulunur.

$$\beta = \sqrt{F\cdot\alpha^2/EI - 1/4}$$

İkinci sınır şartı

$$A\left\{ \mathrm{tg}\left[\beta \ln\left(\frac{\alpha+L}{\alpha}\right)\right] + 2\beta \right\} = 0$$

verir. İfadeyi sağlayan β değeri β_T olmak üzere $0 < \beta < \beta_ç$ halinde burkulma olmadığını gösterir. $\beta_ç$ ye karşılık gelen F_C kritik yükü bulunabilir [L21].

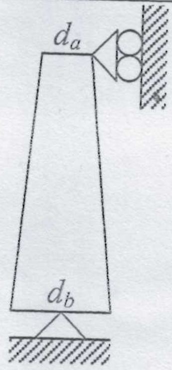
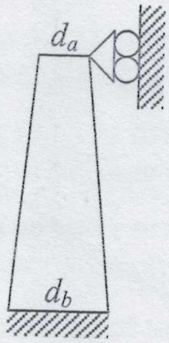
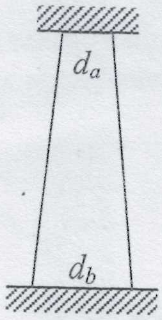
- [L22] ~~Sonlu farklar metodu~~

Prof. Dr. Tuncer TOPRAK hocadan;

Genellikle kesit alanı ve dolayısıyla kesit atalet momenti eksen boyunca değişken olan kolonların burkulması için, uluslararası makaleler, "Sonlu farklar metodu-Finite Difference Method" yöntemi kullanarak sayısal çözüm öneriyorlar. Konu ile ilgili bir tez'in tam metnini de yolluyorum.

Tablo 7 de, max. çap ile min. çap oranının karesi ile sabit kesit halindeki kritik yük çarpılıyor. Kesit dairesel değil ise aynı yaklaşım ile max. boyut ile min. boyut oranı kullanılabilir.

Tablo 7 de, üç mesnetleme durumu için kritik burkulma yükü (F_{kr}) değeri verilmiş olup, bir ucu ankastre diğer ucu serbest çalışan kolon için kritik yük F_{kr} değeri verilmemiştir.

Burkulma durumu (Mesnetlendirme) End Conditions	Şematik Schematic	Kritik burkulma yükü Buckling Load
Pinned-Pinned Bir ucu kayıcı mafsallı Diğer ucu mafsallı	 	$F_{cr} = \left(\dfrac{\pi^2 EI_a}{L^2}\right)\left(\dfrac{d_b}{d_a}\right)^2$
Fixed-Pinned Bir ucu kayıcı mafsallı Diğer ucu ankastre	 	$F_{cr} = \left(\dfrac{\pi^2 EI_a}{(0.6997L)^2}\right)\left(\dfrac{d_b}{d_a}\right)^2$
Fixed-Fixed Her iki ucu ankastre	 	$F_{cr} = \left(\dfrac{4\pi^2 EI_a}{L^2}\right)\left(\dfrac{d_b}{d_a}\right)^2$

Tablo7- Kesit eylemsizlik momenti eksen boyunca değişken olan kolonlarda burkulma durumları ve kritik yükler. (d_a, d_b kesitleri daireseldir)
[L22].

Kolon burkulmalarında kritik yük,

genel olarak,

$$F_{kr} = \pi^2 E I / L_{kr}^2 \quad \text{(Eşitlik 49)}$$

L_{kr} - Kritik burkulma boyu (Tablo 2; Şekil 17)

bilindiğine göre,

Bir ucu ankastre diğer ucu serbest çalışan sabit kesitli kolonlarda kritik yük $L_{kr} = 2L$

dolayısıyla kritik yük

$$F_{kr} = \pi^2 E I / 4L^2 \quad \text{———— (87)}$$

dir.

Kullandığımız kesit dairesel olmadığına göre (Aynı zamanda değişken kesitli kolon),

$$\left.\begin{array}{l} Max\ d = d_b = 30{,}7\ cm \\ Min\ d = d_a = 7\ cm \end{array}\right\} \text{(Şekil 36, 38. Sayfa: 136)}$$

$\left(\frac{d_b}{d_a}\right)$ oranı ile değişken kesitli kolonlarda kritik yük,

$$(F_{kr})_{değişken} = \frac{\pi^2 E I_a}{4L^2}\left(\frac{d_b}{d_a}\right) \quad \text{— (88)}$$

denkleminden hesaplanabilir. Hesaplıyalım.

$$\left.\begin{aligned} I_a &= I_0 = 706\ cm^4 \\ L &= 195\ cm \end{aligned}\right\}\ (Şekil\ 38)$$

$$(F_{kr})_{değ.} = \frac{\pi^2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 706}{4 \cdot 195^2} \left(\frac{30{,}7}{3}\right)$$

$$(F_{kr.})_{değ.} \cong 98449\ kgf \cong 98{,}5\ kN$$

$$(F_{kr})_{değ}(= 98{,}5\ kN) > F\ (= 97{,}86\ kN)$$

uygundur.

Daha önce "Yaklaşık kritik yük" e göre (Eşitlik 65) ;

$$\overline{F}_{kr} = 119{,}4\ kN \quad (Sayfa\ :147)$$

olarak hesaplamıştık.

Her zaman,

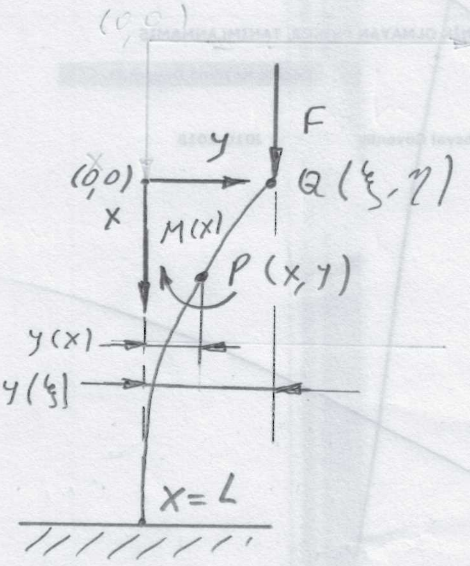
$$\overline{F}_{kr} \geq (F_{kr})_{gerçek} \qquad (Eşitlik\ 66)$$

olduğu gözönüne alınırsa Tablo 7 değerleri pratik ve kullanışlıdır. (Tuncer Toprak hocaya teşekkür ederim)

Şimdi

$$F_{kr} = \pi^2 EI / 4L^2$$

denklemini yeniden ele alalım ve Bir çubuğun kritik uzunluğunun hesabından faydalanarak (Sayfa: 120) bu denklemi elde etmeye çalışalım. Yani; F yükü altında, bir ucu ankastre diğer ucu serbest çalışan sabit kesitli kolon (elastik çubuk) için kritik yük değeri (F_{kr})'i hesaplayalım.



Şekil 41- Ankastre- serbest mesnetli kolon.

Elastik eğri denklemi

$$M(x) = -EI \frac{d^2y}{dx^2}$$

F kuvvetinin deforme olmuş P noktasına göre eğilme momenti

$$M(x) = -F\,(\xi - y)$$

dolayısıyla

$$-F\,(\xi - y) = -EI\,\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} + F(y - \xi) = 0$$

ve

$$k^2 = \frac{F}{EI}$$

dönüşümü ile

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2\,(y - \xi) = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = k^2 \xi$$

homojen lineer diferansiyel denklemi elde edilir. Çözümü: (Ek-2 ye bakınız Sayfa: 251)

Önce,

$$y'' + k^2 y = 0$$

homojen denkleminin genel çözümünü bulalım. Homojen denklemin karakteristik denklemi;

$$r^2 + k^2 = 0$$

$$r_{1,2} = \sqrt{-k^2}$$

$$r_1 = -ik$$

$$r_2 = ik$$

Buradan homogen denklemin genel çözümü,

$$y_h = C_1 e^{-ikx} + C_2 e^{ikx}$$

dir.

$$e^{-ikx} = \cos kx - i \sin kx$$

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$$

yerine konursa

$$y_h = c_1 (\cos kx - i \sin kx) + c_2 (\cos kx + i \sin kx)$$

$$y_h = (c_1 + c_2) \cos kx + (c_2 - c_1) i \sin kx$$

$$C_1 = c_1 + c_2$$

$$C_2 = (c_2 - c_1) i$$

$$y_h = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$$

elde edilir. Verilen denklemin özel çözümü;

Denklemin sağ tarafı

$$y_p = C \cdot \xi$$

seçilirse (Denklemin sağ tarafı ikinci dereceden bir polinom olsaydı $y_p = ax^2 + bx + c$, trigonometrik olsaydı $y_p = a \cos x + b \sin x$ seçilirdi) gerekli türevler,

$$y_p'' = 0$$

$$y_p = C\cdot\xi$$

denklemde yazılırsa

$$0 + k^2 C\cdot\xi = k^2\xi$$

$$C = 1$$

bulunur. Buradan verilen denklemin genel çözümü

$$y = y_h + y_p$$

$$y = C_1\cos kx + C_2\sin kx + \xi$$

olur. C_1, C_2 ve ξ katsayılarını belirlemekte kullanılacak sınır koşulları,

$$x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$0 = C_1 + \xi$$

$$x = 0 \rightarrow y' = 0$$

$$y' = -C_1 k\sin kx + C_2 k\cos kx$$

$$0 = C_2\cdot k$$

$$x = L \rightarrow y = \xi$$

$$\xi = C_1\cos kL + C_2\sin kL + \xi$$

$$C_1\cos kL + C_2\sin kL = 0$$

$$0 = C_2\cdot k$$

olması için

$k \neq 0$ dolayısıyla

$$C_2 = 0$$

olmalıdır.

$$C_1 \cos kL = 0$$

$$-\delta \cos kL = 0$$

yazılır. Burada $\delta \neq 0$ olduğundan

$$\cos kL = 0$$

$$kL = (2n-1)\frac{\pi}{2} \qquad (n=1,2,3 \ldots)$$

elde edilir. En küçük değer kritik burkulma yükünü verir. O da

$n=1$ için

$$k = \frac{\pi}{2L}$$

$$k^2 = \frac{F}{EI}$$

$$\frac{\pi^2}{(2L)^2} = \frac{F_{kr}}{EI}$$

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}$$

olarak bulunur.

Kritik burkulma gerilmesi de

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A}$$

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2 \cdot A}$$

olur.

Denklemin genel çözümüne geri dönersek,

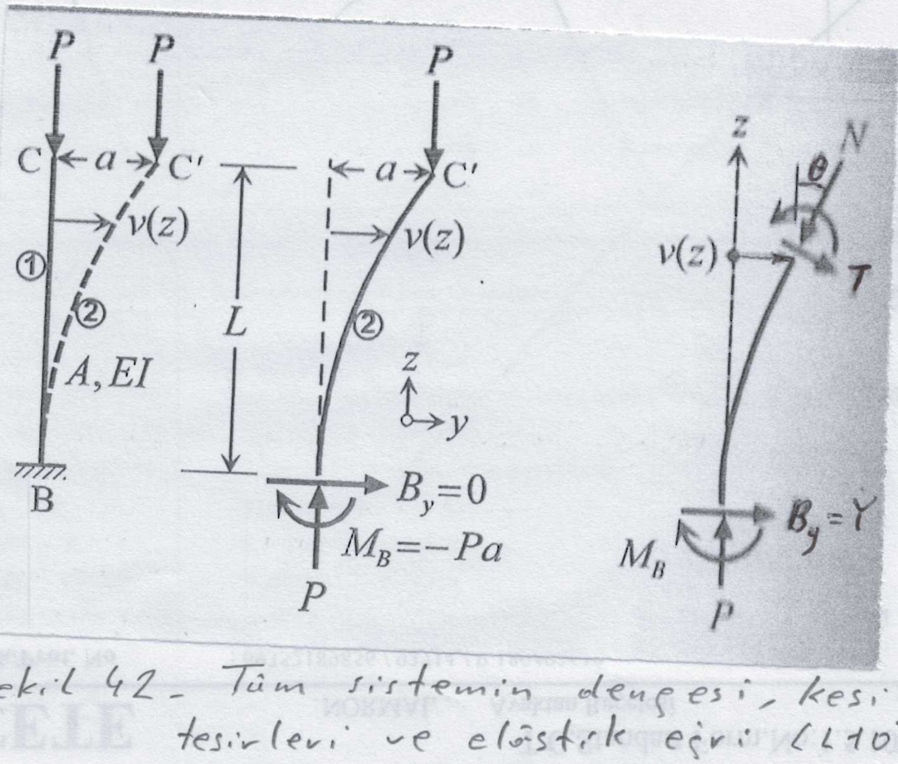
$$y = C_1 \operatorname{Cos} kx + C_2 \operatorname{Sin} kx + \xi$$

$$y = -\xi \operatorname{Cos} kx + \xi = \xi (1 - \operatorname{Cos} kx)$$

$$y = \xi \left\{ 1 - \operatorname{Cos}\left[\frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right] \right\}$$

yazılabilir.

Bu arada Mehmet H. OMURTAG hocadan [L10] aldığım kesit tesirlerini gösteren Şekil 42 (aynı sembollerle) faydalı olur düşüncesiyle verilmiştir.



Şekil 42 - Tüm sistemin dengesi, kesit tesirleri ve elastik eğri [L10].