Molet ve

Molet Saplamaları

MUKAVEMET Hesabı

(inceleme)

- XIV -

$$y_p' = 2\alpha e^{2x}$$

$$y_p'' = 4\alpha e^{2x}$$

verilen denklemde yerine konursa

$$(4\alpha e^{2x}) + 3(2\alpha e^{2x}) + 2\alpha e^{2x} = e^{2x}$$

$$12\alpha e^{2x} = e^{2x}$$

$$12\alpha = 1 \rightarrow \alpha = \frac{1}{12}$$

$$y_p = \frac{1}{12} e^{2x}$$

Genel çözüm,

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} + \frac{1}{12} e^{2x}$$

olur

• $y'' - y' - 2y = e^{2x}$ Genel çözümü.

$$y'' - y' - 2y = 0$$

$$r^2 - r - 2 = 0$$

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 2$$

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

Denklemin sağ tarafı üstel

$$y_p = \alpha e^{2x}$$

$$y_p' = 2\alpha e^{2x}$$

$$y_p'' = 4\alpha e^{2x}$$

$$(4a e^{2x}) - (2a e^{2x}) - 2a e^{2x} = e^{2x}$$

$$0 = e^{2x}$$

gibi anlamsız bir sonuç bulunur. Bunun nedeni sağ taraftaki e^{2x} fonksiyonunun aynı zamanda homojen kısmın çözümünde de bulunmasıdır. Bu durumda,

$$y_p = a x e^{2x}$$

seçilerek

$$y_p' = a e^{2x} + 2a x e^{2x}$$

$$y_p'' = 2a e^{2x} + 2a e^{2x} + 4a x e^{2x}$$

$$(4a e^{2x} + 4a x e^{2x}) - (a e^{2x} + 2a x e^{2x}) - 2a x e^{2x} = e^{2x}$$

$$3a e^{2x} = e^{2x}$$

$$a = \frac{1}{3}$$

$$y_p = \frac{1}{3} x e^{2x}$$

Genel çözüm,

$$y = y_h + y_p$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{3} x e^{2x}$$

olur

• $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ Genel çözümü.

Homojen denklemin genel çözümü.

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$r_1 = r_2 = 2$$

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 \cdot x e^{2x}$$

$$y_h = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$$

dir. Denklemin sağ tarafındaki e^{2x} fonksiyonu aynı zamanda genel çözümde iki katlı kök olarak bulunduğundan, özel çözümü

$$y_p = a x^2 e^{2x}$$

seçerek türevler alınıp verilen denklemde yerine konursa $a = \frac{1}{2}$ bulunur.

$$y_p = \frac{1}{2} x^2 e^{2x}$$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x}$$

olur.

• $y'' + 9y = x^2 e^x$ Genel çözümü

$$y'' + 9y = 0$$

homojen denkleminin genel çözümü,

önce, homojen denklemin karakteristik denklemi

$$r^2 + 9 = 0$$

$$r_1 = -3i \ , \ r_2 = 3i$$

$$y_h = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$ (Sayfa: 253, 254'e bakınız)

Denklemin sağ tarafı, polinom ve üstel fonksiyonların çarpımı olduğundan

$$y_p = (ax^2 + bx + c)e^x$$

seçilerek, türevler verilen denklemde yerine konursa

$$a = \frac{1}{10}, \ b = -\frac{1}{25}, \ c = -\frac{3}{250}$$ bulunur.

$$y_p = \left(\frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{25}x - \frac{3}{250}\right)e^x$$

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \left(\frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{25}x - \frac{3}{250}\right)e^x$$

olur.

- $y''' + y'' = \sin x + e^x$ Genel çözümü

$$y''' + y'' = 0$$

$$r^3 + r^2 = 0$$

$$r_1 = r_2 = 0 \ , \ r_3 = -1$$

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$$

Denklemin sağ tarafındaki fonksiyondan

$$y_p = a \cos x + b \sin x + c e^{x}$$

seçilip, alınan türevler verilen denklem_de yerine konursa

$$a = \frac{1}{2} \ , \ b = -\frac{1}{2} \ , \ c = \frac{1}{2}$$ bulunur.

$$y_p = \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} e^{x}$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} e^{x}$$

olur

$$y'' - 3y' - 4y = 52 e^{x} \cos 2x$$ Genel çözümü

$$y'' - 3y' - 4y = 0$$

$$r^2 - 3r - 4 = 0$$

$$r_1 = -1$$

$$r_2 = 4$$

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x}$$

Denklemin sağ tarafındaki fonk-

siyondan

$$y_p = a e^{x} \cos 2x + b e^{x} \sin 2x$$

seçilip, gerekli türevler alınarak verilen

denklemde yerine konursa

$a = -5$, $b = -1$ bulunur.

$$y_p = -5 e^{x} \cos 2x - e^{x} \sin 2x$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x} - 5 e^{x} \cos 2x - e^{x} \sin 2x$$

bulunur.

c) Cauchy-Euler Diferansiyel

denklemi [18];

$$x^{n} y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = b(x)$$

şeklindeki denklemlere Cauchy-Euler denklemi

denir. Bu denklem $x > 0$ için $x = e^{t}$,

$x < 0$ için $x = e^{-t}$ değişken değiştirmesi

ile sabit katsayılı denkleme dönüştürülerek

çözülebilir.

$D = \frac{d}{dt}$ türev operatörü olmak üzere

$$x = e^{t}$$

$$\ln x = t \cdot \ln e$$

$$\ln x = t$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \left(y = \ln u \rightarrow y' = \frac{u'}{u} \right)$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{e^t} = e^{-t}$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t} = e^{-t} Dy$$

$$= \frac{1}{x} Dy \rightarrow xy' = Dy$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt} e^{-t}\right) e^{-t}$$

$$= \left(\frac{d^2y}{dt^2} e^{-t} - \frac{dy}{dt} e^{-t}\right) e^{-t}$$

$$= \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) e^{-2t}$$

$$= \left[D(D-1)y\right] e^{-2t}$$

$$= \left[D(D-1)y\right] \frac{1}{x^2}$$

$$x^2 y'' = D(D-1)y$$

olarak bulunur.

• $x^2y'' + xy' - 4y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Verilen denklem Cauchy-Euler denklemi olduğundan $x = e^t$ dönüşümü yapalım.

$$xy' = D \cdot y$$

$$x^2y'' = D(D-1)y$$

ifadeleri denklemde alınırsa

$$D(D-1)y + Dy - 4y = 0$$

$$D^2y - 4y = 0$$

$$y'' - 4y = 0$$

t ye göre yazılmış lineer denklemi elde edilir. Bunun karakteristik denklemi

$$r^2 - 4 = 0$$

$$r_1 = -2, \quad r_2 = 2$$

Genel çözüm

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t}$$

olur. $x = e^t \rightarrow \ln x = t$

$$y = c_1 e^{-2\ln x} + c_2 e^{2\ln x}$$

$$e^{-2\ln x} = u$$

her iki tarafın logaritmasını alarak

$$-2\ln x \cdot \ln e = \ln u$$

$$-2\ln x = \ln u$$

$$x^{-2} = u$$

$$e^{-2\ln x} = x^{-2}$$

dolayısıyla,

$$y = c_1 \frac{1}{x^2} + c_2 x^2$$

genel çözümü bulunur.

- $x^2y'' + xy' + y = 0$ Genel çözümü

Denklem, Cauchy-Euler denklemidir. Dolayısıyla $x = e^t$ dönüşümü yapalım.

$$xy' = D.y$$

$$x^2y'' = D(D-1)y$$

değerleri denklemde yerlerine konursa

$$D(D-1)y + D.y + y = 0$$

$$D^2y + y = 0 \rightarrow y'' + y = 0$$

elde edilir. Bunun karakteristik denklemi

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r_1 = -i$$

$$r_2 = +i$$

dir. Genel çözüm,

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

$$x = e^t \rightarrow \ln x = t$$

$$y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)$$

olarak bulunur.

- $2x^2y'' + xy' - 3y = 0$ Genel çözümünü bulunuz.

Verilen denklem, Cauchy-Euler denklemi dolayısıyla $x = e^t$ dönüşümü yapılır.

$$xy' = Dy$$

$$x^2y'' = D(D-1)y$$

$$2D(D-1)y + Dy - 3y = 0$$

$$2D^2y - Dy - 3y = 0$$

$$2y'' - y' - 3y = 0$$

$$2r^2 - r - 3 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{1+24}}{4} \quad r_1 = -1, \quad r_2 = \frac{3}{2}$$

Genel çözüm

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{\frac{3}{2}t}$$

$$x = e^t$$

$$y = \frac{c_1}{x} + c_2 x^{3/2}$$

bulunur.

• $x^2y'' + xy' + y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümü.

Cauchy - Euler denklemi

$x = e^t$ dönüşümü ile

$xy' = Dy$

$x^2y'' = D(D-1)y$

$D(D-1)y + Dy + y = 0$

$D^2y + y = 0 \rightarrow y'' + y = 0$

$r^2 + 1 = 0 \rightarrow r_1 = -i \ , \ r_2 = +i$

$y = c_1 \operatorname{Cos} t + c_2 \operatorname{Sin} t$

$y = c_1 \operatorname{Cos}(\ln x) + c_2 \operatorname{Sin}(\ln x)$

bulunur.

• $xy''' - \dfrac{18y'}{x} = 0$ Genel çözümü.

Denklemi x^2 ile çarpalım

$x^3y''' - 18xy' = 0$

$x = e^t$ dönüşümü

$xy' = Dy$

$x^2y'' = D(D-1)y$

$x^3y''' = D(D-1)(D-2)y$

$$D(D-1)(D-2)y - 18Dy = 0$$

$$D^3 - 3D^2 - 16Dy = 0$$

$$y''' - 3y'' - 16y = 0$$

$$r^3 - 3r^2 - 16 = 0$$

$$r^3 - 4r^2 + r^2 - 16 = 0$$

$$r^2(r-4) + (r-4)(r+4) = 0$$

$$(r-4)(r^2 + r + 4) = 0$$

$$r_1 = 4$$

$$r^2 + r + 4 = 0$$

$$r_{23} = \frac{-1 \mp \sqrt{1-16}}{2}$$

$$r_2 = \frac{-1 + \sqrt{15}\,i}{2}$$

$$r_3 = \frac{-1 - \sqrt{15}\,i}{2}$$

$$y_h = c_1 e^{\left(\frac{-1-\sqrt{15}i}{2}\right)t} + c_2 e^{\left(\frac{-1+\sqrt{15}i}{2}\right)t} + c_3 e^{4t}$$

$$y_h = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cdot e^{\frac{-\sqrt{15}it}{2}} + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \cdot e^{\frac{\sqrt{15}it}{2}} + c_3 e^{4t}$$

$$y_h = e^{-\frac{1}{2}t}\left[c_1 e^{\frac{-\sqrt{15}it}{2}} + c_2 e^{\frac{\sqrt{15}it}{2}}\right] + c_3 e^{4t}$$

$$y_h = e^{-\frac{1}{2}t}\left[c_1\left(\cos\frac{\sqrt{15}}{2}t - i\sin\frac{\sqrt{15}}{2}t\right.\right.$$

$$\left.\left. + c_2\left(\cos\frac{\sqrt{15}}{2}t + i\sin\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right] + c_3 e^{4t}$$

$$y_h = e^{-\frac{1}{2}t}\left[C_1 \cos\frac{\sqrt{15}}{2}t + C_2 \sin\frac{\sqrt{15}}{2}t \right] + c_3 e^{4t}$$

$$C_1 \to C_1 + C_2 \qquad C_2 \to (C_2 - C_1)i$$

$$x = e^t \rightarrow \ln x = t$$

$$y_h = e^{-\frac{1}{2}\ln x}\left[C_1 \cos\frac{\sqrt{15}}{2}\ln x + C_2 \sin\frac{\sqrt{15}}{2}\ln x \right] + c_3 x^4$$

olur.

d) Legendre diferansiyel denklemi,

[L 18]

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{(n-1)} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = b(x)$$

şeklindeki denklemlere Legendre denklemi denir.

Bu denklem

$$ax+b = u$$

dönüşümü ile Cauchy-Euler denklemine dönüşür. Bu denklem

$$ax+b = e^t$$

değişken değiştirmesi ile sabit katsayılı denkleme dönüştürülerek çözülebilir.

$D = \frac{d}{dt}$ türev operatörü ile

$$ax+b = e^t$$

$$a\frac{dx}{dx} = e^t \frac{dt}{dx} \qquad (y = e^u \rightarrow y' = u' e^u)$$

$$\alpha\, dx = e^{t}\, dt$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\alpha}{e^{t}} = \frac{\alpha}{\alpha x+b} = \alpha e^{-t}$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\alpha e^{-t} = \frac{dy}{dt}\frac{\alpha}{\alpha x+b}$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha x+b} Dy$$

$$(\alpha x+b)\, y' = \alpha D y$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\alpha e^{-t}\right)\alpha e^{-t}$$

$$= \left(\frac{d^2y}{dt^2}\alpha e^{-t} - \frac{dy}{dt}\alpha e^{-t}\right)\alpha e^{-t}$$

$$= \alpha^2\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}$$

$$= \alpha^2\left[D(D-1)y\right]e^{-2t}$$

$$= \alpha^2\left[D(D-1)y\right]\frac{1}{(\alpha x+b)^2}$$

$$(\alpha x+b)^2 y'' = \alpha^2 D(D-1)\, y$$

$$(ax+b)^3 y''' = a^3 D(D-1)(D-2)y$$

$\vdots$

Bulunan bu ifadeler Legendre diferansiyel denkleminde yerine konursa t ye göre yazılmış sabit katsayılı lineer bir denklem elde edilir. Elde edilen bu lineer denklem çözüldükten sonra $t = \ln|ax+b|$ yazılıp genel çözüm bulunmuş olur.

• $(x-2)^2 y'' + 2(x-2)y' - 6y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Verilen denklem Legendre denklemi olduğundan

$$x-2 = e^t$$

dönüşümü yapalım.

$$(x-2)y' = Dy$$

$$(x-2)^2 y'' = D(D-1)y$$

$$D(D-1)y + 2Dy - 6y = 0$$

$$D^2 y + Dy - 6y = 0$$

$$y'' + y' - 6y = 0$$

• $(3x+4)^2 y'' + (3x+4) y' + y = 0$ diferan_
siyel denkleminin genel çözümü_

Verilen denklem Legendre denklemi

dolayısıyla

$$(3x+4) = e^{t}$$

dönüşümü ile

$$(3x+4)y' = 3Dy$$

$$(3x+4)^2 y'' = 9D(D-1)y$$

ifadeleri denklemde yerine yazılırsa

$$9D(D-1)y + 3Dy + y = 0$$

$$9D^2 y - 6Dy + y = 0$$

$$9y'' - 6y' + y = 0$$

$$9r^2 - 6r + 1 = 0$$

$$r_1 = r_2 = \frac{1}{3}$$

Genel çözüm,

$$y = (c_1 + c_2 t)\, e^{\frac{1}{3}t}$$

$$3x+4 = e^{t}$$

$$t = \ln|3x+4|$$

$$y = (c_1 + c_2 \ln|3x+4|)\sqrt[3]{3x+4}$$

olur.

- $(2x+7)^2 y'' - 2(2x+7)y' - 12y = 0$

diferansiyel denkleminin genel çözümü.

Denklem Legendre denklemidir dolayısıyla,

$$2x+7 = e^t$$

$$(2x+7)y' = 2Dy$$

$$(2x+7)^2 y'' = 4D(D-1)y$$

$$4D(D-1)y - 4Dy - 12y = 0$$

$$4D^2y - 8Dy - 12y = 0$$

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 3$$

Genel çözüm,

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}$$

$$2x+7 = e^t \rightarrow t = \ln|2x+7|$$

$$y = \frac{c_1}{2x+7} + c_2 (2x+7)^3$$

bulunur.

LİTERATÜR

[1] - Prof. Dr. Mustafa SAVCI
Prof. Dr. Alaeddin ARPACI
" Mukavemet "
Birsen Yayınevi. İSTANBUL - 2003

[2] - Prof. Dr. M. Suat ÇAKMAK
" Volan ve Volan Hesapları "
Yıldız Teknik Üniversitesi.
Makina Mühendisliği Bölümü.
Sayı : 279 istanbul - 1993

[3] - R. C. Hibbeler - S. C. Fan
Ayşe Soyuçok - Özgün Soyuçok
" Mühendislik Mekaniği - STATİK "
Literatür Yayıncılık. İstanbul - 2007

[4] - E. W. NELSON - C. L. BEST - W. G. McLEAN
Trd. Doç. Dr. Ahmet ÇELİK
" Mühendislik Mekaniği "
Nobel Yayın Dağıtım. ANKARA - 2011

[5] - Ord. Prof. Dr. Hilmi İLERİ
" Grafostatik ve Mukavemet "
Teknik okulu yayınları Sayı: 49
İstanbul - 1964

[6] - Ord. Prof. Dr. Hilmi İLERİ
" Makina Elemanları Hesabı "
İ.T.Ü Kütüphanesi, Sayı: 721
İkinci Cilt . İstanbul - 1968

[7] - Tuncer ÖZKAN
" Halat ÖMRÜ "
www.tuncer-ozkan.com

[8] - Prof. Dr. Mehmet YÜKSEL
" Malzeme Bilgisi "
TMMOB Makina Mühendisliği
Odası . ANKARA - 2001

[9] - MAN - GHH
Kozlu Yeni Kuyu
(Teknik Bilgiler)

[10] - Prof. Dr. Mehmet H. OMURTAG
" Mukavemet Cilt : 2 "
Birsen Yayınevi İstanbul 2007
" Mukavemet Çözümlü
Problemler Cilt : 1 "
Birsen Yayınevi İstanbul 2011

[11] - Murat ULUSOY
Elektro - Mekanik Baş. Müh.
" Hema Endüstri A.Ş "
Kişisel görüşme

[12] - Prof. Dr. Mustafa İNAN
"Cisimlerin Mukavemeti"
Arı Kitabevi Matbaası
İstanbul - 1967

[13] - Doç. Dr. Esin Ergintan İNAN
"Cisimlerin Mukavemeti, Çözümlü Problemler"
Apraz Matbaacılık İSTANBUL - 1978

[14] - Prof. Dr. İlhan KAYAN
"Cisimlerin Mukavemeti"
İ.T.Ü Matbaası. Gümüşsuyu - 1987

[15] - Edwards - Penney - Prof. Dr. Ömer AKIN
"Diferansiyel Denklemler"
Palme Yayıncılık Ankara - 2008

[16] - Faruk Güngör
"Diferansiyel Denklemler"
İ.T.Ü Vakfı İstanbul - 2007

[17] - Peter V. O'Neil - Prof. Dr. Yaşar PALA
"İleri Mühendislik Matematiği"
Nobel Yayıncılık. 2013 - ANKARA

[18] - Erhan PİŞKİN
"Çözümlü Diferansiyel Denklem Problemleri"
SEÇKİN Yayıncılık. Ankara - 2016

[19] - Tuncer ÖZKAN
"Pratikte çok görülen halat hasarları küçük atlası ve halat bağlama (bağlantı) elemanları"
www.tuncer-ozkan.com

[20] - Prof. Dr. Mehmet BAKİOĞLU
"Cisimlerin Mukavemeti: Cilt: 2"
Beta Basım A.Ş İstanbul - 2009

[21] - Prof. Dr. Yaşar PALA
"Modern Uygulamalı Diferansiyel Denklemler Çözümlü Problemler"
Nobel Yayın Dağıtım. Ankara. 2011

[22] - Prof. Dr. Tuncer TOPRAK
Kişisel görüşme
(Gönderdiği Tez: "Sonlu farklar metodu - Finite Difference Method")

[23] - Prof. Dr. Talât TEVRUZ
"Makina Elemanları ve Konstrüksiyon Örnekleri Cilt: 1"
Çağlayan Kitabevi. İSTANBUL - 2015

[24] - FAG Rulmanları
Standart Program

[25] - Prof. Dr. Fatih C. Babalik
"Makina Elemanları Çözümlü Problemleri"
Dora Basım - Yayın - Dağıtım
Bursa - 2012

[26] - Prof. Dr. Atilla BOZACI
"Makina Elemanları"
Çağlayan Kitabevi İSTANBUL - 2012

[27] - Mustafa AKKURT - Malik KENT
"Makina Elemanları"
İ.T.Ü Matbaası Gümüşsuyu - 1975

[28] - Prof. Y. Müh Orhan ÜNSAÇ
"Mukavemet"
Kurtulmuş Matbaası İSTANBUL - 1963

16 - Kasım - 2020

Saat : 13.45